

1 Основы комплексных исчислений

$$Z = x + iy, i = \sqrt{-1}$$

$$x = \operatorname{Re}(Z) - \text{“вещественная” часть}$$

$$y = \operatorname{Im}(Z) - \text{“мнимая” часть}$$

$$\text{модуль: } |Z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$\text{угол: } \angle(Z) = \operatorname{atan}(y/x) = \angle\theta \text{ (так же называется “аргумент” } Z)$$

$$\operatorname{Re}(Z) = |Z| \cdot \cos(\theta)$$

$$\operatorname{Im}(Z) = |Z| \cdot \sin(\theta)$$

$$Z = |Z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$$

2 Комплексное представление цифрового сигнала

Обычно мы представляем аналоговый сигнал синусоидальной формы как: $f(t) = a \cdot \sin(\omega t + \phi)$, тот же сигнал в дискретном домене представлен как $x[n] = a \cdot \sin(n\omega + \phi)$. Возьмём сигнал с амплитудой $a = 1$ и фазой $\phi = 0$, для удобства, получаем $x_1[n] = \sin(n\omega)$. Это можно представить как комплексное число $Z_{x_1[n]}$...

Для начала представим Z_a с аргументом ω :

$$Z_a = \cos(\omega) + i \cdot \sin(\omega)$$

Для каждого целого числа n , $Z^n = \cos(n\omega) + i \cdot \sin(n\omega)$, включая отрицательные значения n . Степени Z могут быть изображены на единичной окружности.

$$\operatorname{Re}(Z^n) = \cos(n\omega)$$

Для удобства анализа используется комплексное представление сигналов, но берется только $\operatorname{Re}()$ *конечного результата*. Нетрудно заметить, в предыдущей формуле соответствие с представлением $x_1[n]$.

По скольку большинство сигналов имеют $a \neq 1$ и $\phi \neq 0$, используется *комплексная постоянная* A , представляющая *фазу* и *амплитуду*, как её *аргумент (угол)* и *модуль*. Таким образом, $x_1[n]$ представляется продуктом двух комплексных чисел:

$$x_1[n] = Z_{x_1[n]} = AZ^n$$

$$AZ^n = a \cdot [\cos(\omega n + \phi) + i \cdot \sin(\omega n + \phi)]$$

$$\operatorname{Re}(Z_{x_1[n]}) = a \cdot \cos(\omega n + \phi)$$

Используя данное представление, все действия над сигналами становятся гораздо проще.

Пример: для $X[n] = AZ^n$ и $Y[n] = BZ^n$ сумма $X[n] + Y[n] = (A + B) \cdot Z^n$ даёт фазу равную сумме фаз $\angle(A+B)$ и амплитуду - модулю $|A + B|$.

Дальнейшие примеры и способы использования находятся в последующих конспект-литах.

3 Ссылки

Основной материя конспекта взят из книги *M. Puckette, "Teory and Techniques of Electronic Music" (2007, World Scientific Press)*. [<http://www-crcs.ucsd.edu/~msp/techniques.htm>]